第12卷 第2期 海 洋 预 报 Vol.12, No.2
1995年5月 MARINE FORECASTS May., 1995

贝塞尔插值及其在数值预报中的应用

王跃山

（国家海洋环境预报中心，北京）

摘 要

本文将贝塞尔插值公式写成中央差分的形式，取其二阶便得到我们通常在数值预报中所使用的内插公式。其后本文给出了它在二维插值中应用的方法和算法。最后本文分析了贝塞尔插值的特点，并将其同三次样条插值和Lagrange插值作了比较。

关键词：贝塞尔插值，插值在数值预报中的应用。

数值预报中，常常用观测值与分析、预报值的差来衡量分析、预报的好坏；也常常用这个差值来逐次订正客观分析[1]或者反馈给数值模式；近年来的分析、同化方案中都常常要用到这个差值。这样，我们就必须将格点值插到观测站点处，或者相反。但是，由于从不规则的观测点插到规则的格点上，比从规则插到不规则，难度要大得多。实际上，前者正是客观分析的主要内容。我们这里要解决的是后者提出的问题。

高度场在垂直方向的插值，笔者十年前做过这方面的研究[2]。结果十分有趣，从好到差的顺序，它们分别是：（1）以$\ln p$（p是气压）为自变量的三次样条插值；（2）以$\ln p$为自变量的Lagrange插值；（3）以p为自变量的样条插值；（4）由准静力公式和热力学第一定律导出的插值公式；（5）准静力插值；（6）以p为自变量的Lagrange插值。

本文要解决的是水平二维插值，或者称为平面插值。我们这里也只介绍贝塞尔插值，因为它最有用，可以说，数值预报中的二维水平插值大部分使用的都是贝塞尔插值。

将贝塞尔公式以中央插分格式写成插值公式，只保留到第二阶插分，我们有

$$y \simeq \frac{1}{2}(y_0+y_1)+\left(t-\frac{1}{2}\right)\delta y_{\frac{1}{2}}+t(t-1)/2\left(\frac{\delta^2 y_0+\delta^2 y_1}{2}\right) \qquad (1)$$

在公式（1）中我们采用中央差分格式，是因为该格式比向前差分、向后差分的计算精度都高[3]。为了弄清公式（1）中各量的含义，参考图1，y_{-1}，y_0，y_1和y_2分别是格点$I-1$，I，$I+1$和$I+2$处的值，x_{-1}，x_0，x_1和x_2分别是上述四格点的坐标。我们的问题是，已知格点$I-1$，I，$I+1$，$I+2$处的值为y_{-1}，y_0，y_1和y_2，如何求出位于格点I和格点$I+1$之间、坐标为x处的值y，问题的答案就是公式（1）。公式中，

$$t=\frac{x-x_0}{h}, \ h\text{是格距。} \qquad (2)$$

本文于1994年12月收到。

由此不难知$0<t<1$。$\delta y_{1/2}$,$\delta^2 y_0$，$\delta^2 y_1$分别表示y在 $x_{\frac{1}{2}}$处的一阶差分（如前面已经讲到的，这里的差分是指中央差分，以后皆同。y在 x_0处的二阶差分和y在x_1处的二阶差分。我们下面要把它们即($\delta y_{1/2}\delta^2$，y_0和$\delta^2 y_1$)一一展成真正的差分形式。

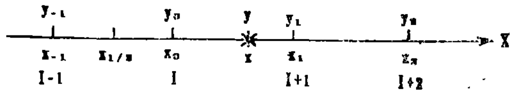

图1　一组贝塞尔插值示意图

由中央差分定义

$$\delta y_{k+\frac{1}{2}}=y_{k+1}-y_k \tag{3}$$

我们得到二阶中央差分为

$$\delta^2 y_k=y_{k+1}+y_{k-1}-2y_k \tag{4}$$

由（3）和（4）我们容易得到

$$\begin{aligned}&\delta y_{\frac{1}{2}}=y_1-y_0\\&\delta^2 y_0=y_1+y_{-1}-2y_0\\&\delta^2 y_1=y_2+y_0-2y_1\end{aligned} \tag{5}$$

将（5）代入（1），我们即可得到最后的实用公式

$$y=\frac{1}{2}(y_1+y_0)+\left(t-\frac{1}{2}\right)(y_1-y_0)+\frac{1}{4}t(t-1)(y_2-y_1-y_0+y_{-1}) \tag{6}$$

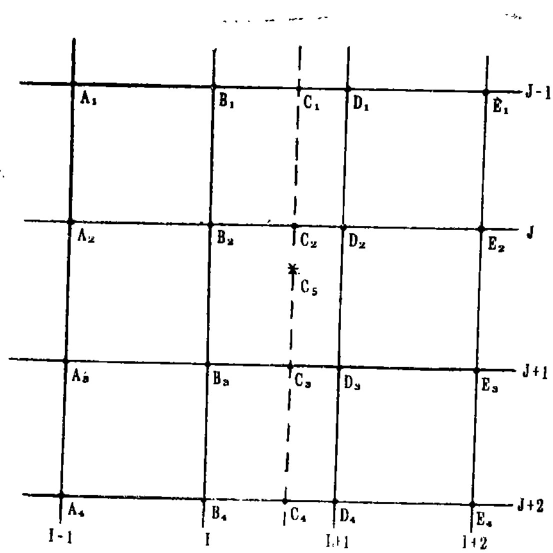

图2　二维网状贝塞尔插值示意图

该式告诉了我们要内插出位于格I和$I+1$之间x处的值，需要知道格点$I-1$，I，$I+1$和$I+2$处的值，然后将其代入公式（6）即可求出x处的值y。或者更确切地讲，利用贝塞尔插值公式内插任意两格点之间的值，需要知道内插点两侧各两个最近格点上的值。

从图1我们不难知道，到此为止我们才得到了一维方向上的插值公式。可是，在实用中，绝大部分都是二维方向上的插值问题。那么又如何得以解决呢？

欲得到真正的二维贝塞尔插值公式，必须首先导出二维贝塞尔公式，然后将其离散化，写成差分形式。且不论这样作是否可能，仅就计算量的增长问题也常常不得不使人作罢。因为在数值预报中，插值用得很多，如果计算量增长过多，那你就得必须在计算精度和计算时间之间采取明智的折衷措施。对这一类问题，通常的作法是，先在一个方向上

使用公式（6），然后再在另一个方向上计算插值。在图2中，先在I方向上使用插值公式。即利用A_1，B_1，D_1和E_1处的值插出C_1处的值，利用A_2，B_2，D_2，E_2处的值插出C_2处的值。同样的方式分别插出C_3和C_4处的值。然后在J方向上使用插值公式，即利用求出的C_1，C_2，C_3和C_4处的值插出C_5的值来。这种方法的实质是，使用一维的插值公式，解决了二维插值的问题。这种方法，可以称作准二维插值方法，或称之为双一维插值方法，或称为二维网状插值。由于这个插值方法是使用16个格点的值来插出中心网格内任一点的值，所以有时又称作16点插值。在实用中，最重要的是要注意，求某一网格区域内的插值，需要知道向外多两圈的网格区域内的网格点值。比如，要求20×30网格区域内的插值，那就需要知道22×32网格区域内的格点值。换一种说法也许更有用，当你在你的网格区域内欲使用贝塞尔插值时，要记住，它只能求出向内缩两圈以后所得到的网格区域内的插值。

下面笔者给出计算贝塞尔插值的程序。注意使用的条件是，网格区域应当比插值区域向外多两圈。

```
      SUBROUTINE BI (FI, FJ, E, EI)
C BI stands for Bessel Interpolation.
C FI, FJ is two-dimensional coordinate of a location
C where exists the element value to be interpolated.
C E stands for element, also can be named by
C variable in physics.
C EI means interpolated value of the element.
      PARAMETER (M=×××, N=×××)
C M, N are dimension size of element array E.
C They must be integer number, and must be
C given by the program runner before it get run.
      DIMENSION E(M, N), EM(4)
      I=FI
      J=FJ
      FIS=I
      FJS=J
      DX=FI-FIS
      DY=FJ-FJS
      DO 100 L=1, 4
      J1=J-2+L
      DE=E(I+1, J1)-E(I, J1)
      DDE=(E(I+2, J1)-E(J+1, J1)-E(I, J1)
      +E(I-1, J1))/4.0
      EM(L)=(E(I+1, J1)+E(I, J1))/2.0+(DX-0.5)
```

```
      1     *DE+DX* (DX—1.0) *DDE
      100   CONTINE
C   The interpolation along I direction has been
C   finished.Following part of the program is for
C   the interpolation along J direction with 4 just
C   interpolated values.
            DE=EM (3) —EM (2)
            DDE= (EM (4) —EM (3) —EM (2) +EM (1) ) /4·0
            EI= (EM (3) +EM (2) ) /2·0+ (DY—0.5) *DE
      1     +DY* (DY--1·0) *DDE
            RETURN
            END
```

关于这个程序，有几点需要说明：

（1）程序中只作了一个要素E的内插，但只要稍加变动，即可进行多种要素的内插。如不想改动程序本身，也只须多调几次该程序即可实现多要素的内插。

（2）程序中实际上只完成了一个点的内插，但更多点的内插只须更多次地调用该程序即可实现。

（3）有了这个子程序，你可以方便地将你的格点场转换到其它类型的网格上。比如，你的网格是极射投影网格，你可以将格点场转换到园锥投影网格上、园柱投影网格上或者经纬度网格上。我们现在以从极射投影网格到经纬度网格为例，更详细地说明一下这种程序应当如何编。程序体应包括四部分工作：

第一部分工作

在经纬度范围内构造循环语句，按照你的需要，循环范围纬度从0到90，间隔取5，经度从东经0到180，间隔亦取5。于是，循环的每一步我们都有了要求插值的那个点的纬度和经度。

第二部分工作

根据两个网格之间的关系，从纬度、经度值求出极射投影网格内相应的坐标值。

第三部分工作

调用子程序BI，求出插值EI。

第四部分工作

将所有插出的值输出到一个文件上。

（4）在做这种网格转换时，一定要弄清插值域是否含于你的原网格内，而且插值域的定义域也必须含于你的原网格内，否则，程序将不能正常工作。不过，如能对每一个（FI，FJ）判断以下十六点是否落在你的网格内：

(I—1，J—1)，(I，J—1)，(I+1，J—1)，(I+2，J—1)，
(I—1，J)，(I，J)，(I+1，J)，(I+2，J)，
(I—1，J+1)，(I，J+1)，(I+1，J+1)，(I+2，J+1)，

(I—1, J+2), (I, J+2), (I+1, J+2), (I+2, J+2),

若落在你的网格内，你就调用BI，否则就进行下一个（FI, FJ）。程序作了这样的修改之后，它就总能工作了。

（5）应当指出的是，做网格转变时，信息的损失要大于最外边的两圈。

最后我们再回到贝塞尔插值上。从前面的公式（6）我们可以知道，整个贝塞尔插值的计算不过是算术运算，所以在计算机上是非常快的。而且，它计算的插值其精度也非常高。前面我们讲了，公式（1）中保留了二阶差分。现在让我们来看看二阶差分大概是多大的量。对于大气、海洋的基本变量（压力、温度、密度）而言，它们在空间上的分布是连续的。当空间步长取得不是特别大的时候，这些量的变化（即一阶差分）就不会太大，更不用说它们变化量的变化（即二阶差分），那就更小了。此外，同 Largrange插值相比，由于 Lagrange 插值充其量只具有一阶差分的精度，显然它比 Lagrange 插值的精度要高。虽然它的计算精度比样条插值要低，但计算样条插值时，需要碰到两个棘手的问题：第一，每个插值点都要计算六个5阶矩阵，而且需要周围25个格点的资料；第二，三次样条求解时，需要确定边界条件。这无形中都给样条插值的实用带来了很大的不便[2]。这也是人们乐意使用贝塞尔插值而不是样条插值的原因，在业务系统中尤为如此。

参考文献

〔1〕 王跃山等，国家海洋环境预报中心的业务客观分析系统，第一部分：系统结构及其功能，海洋预报，第7卷，第1期，PP.37～47，1990。

〔2〕 Yao Shan Wang, The comparison of the fundamental vertical intrepolation methods for height fields.
Ninth conference on probability and statistics in atmospheric sciences.PP.243～246 AMS, 1985。

〔3〕 顾尔祚，流体力学有限差分法基础，上海交通大学出版社，1988。

BESSEL INTERPOLATION AND ITS APPLICATIONS IN NUMERICAL PREDICTION

Wang Yaoshan
(*National Reserch Center for Marine Environmental Forecasting, Beijing*)

Abstract

Written in central difference format and taken only the second order of the finite difference presentation, this paper provides a Bessel Interpolation formula. Then shows how to use the formula in two-dimensional interpolation and a corresponding source code as well as some important comments on the usage of the program. As a good end, this paper gives an analysis to the Interpolation and makes a comparison with well-known Lagrange Interpolation and spline analogue.

Key words: Bessel interpolation, Interpolation applications in numevical prediction.